На правах рукописи

УДК 513

Шкрыль Елена Валентиновна

Бесконечно малые изгибания поверхностей с особыми точками

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2001

Работа выполнена в Ростовском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор П. Е. Марков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор И. Х. Сабитов

кандидат физико-математических наук, доцент В. Е. Фомин

Ведущая организация: Воронежский государственный университет

Защита состоится 30 ноября 2001 г. в 14 часов на заседании Диссертационного совета К 053. 29. 05 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, КГУ, корп. 2, ауд. 217

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18. Конф. зал библ. КГУ

Автореферат разослан 22 октября 2001 г.

Ученый секретарь Совета
доктор физико-математических
наук, профессор М. А. Малахальцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основные результаты классической теории бесконечно малых изгибаний поверхностей получены для регулярных достаточно гладких поверхностей. Исследование бесконечно малых изгибаний поверхностей с особыми точками ~~представляет одну из довольно~~ трудных задач, так как для таких поверхностей классические методы, как правило, неприменимы. Если не считать многогранников, то в этом направлении имеются лишь отдельные результаты.

С. Э. Кон-Фоссеном исследованы бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения с коническими точками. Н. В. Ефимов, Б. В. Боярский и И. Н. Векуа доказали жесткость овалоида, склеенного из конечного числа кусков гладких регулярных поверхностей. Б. В. Боярский, с использованием интегральной формулы В. Бляшке, доказал жесткость замкнутой кусочно выпуклой (но не выпуклой в целом) поверхности, склеенной из конечного числа кусков выпуклых поверхностей класса C^3, при условии ее звездности и малости имеющихся на ней "прогибов". Л. Г. Михайловым и З. Д. Усмановым исследованы бесконечно малые изгибания поверхностей вращения с коническими точками при некоторых краевых условиях. Ряд признаков жесткости кусочно-выпуклых поверхностей, склеенных из конечного числа кусков класса C^3, получен в работах П. Е. Маркова и В. Т. Фоменко

В работах перечисленных авторов не исключалось наличие на рассматриваемых поверхностях вершин (точек пересечения нескольких линий склеивания). Б. В. Боярским и И. Н. Векуа допускалось также наличие конических точек при условии, что в окрестности каждой конической точки поверхность является прямым конусом. При этом же условии бесконечно малые изгибания кусочно выпуклых поверхностей с коническими точками рассматривались Л. П. Фоменко.

Требование, чтобы поверхность в окрестности конической точки была прямым конусом, позволяет находить явные выражения для компонентов изгибающего поля, что существенно облегчает задачу. В общем случае такие выражения отсутствуют. Поэтому, задача исследования бесконечно малых изгибаний кусочно-выпуклых поверхностей с коническими точками общего вида наталкивается на серьезные трудности и представляется актуальной.

В последние годы все больше внимания геометров уделяется бесконечно малым изгибаниям многомерных поверхностей. Бесконечно малые изгибания n-мерных поверхностей в m-мерном евклидовом пространстве рассматривались в работах Н. Н. Яненко, П. Е. Маркова, Р. Голдстейна, П. Райна, М. Дайцера, Л. Родригеса, К. Тененблат. В перечисленных работах рассматривались регулярные многомерные поверхности достаточно высокой гладкости. Поэтому, представляется актуальной и задача исследования бесконечно малых изгибаний многомерных поверхностей с особыми точками.

Цель работы. Целью данной работы является исследование бесконечно малых изгибаний кусочно выпуклых двумерных поверхностей трехмерного евклидова пространства, допускающих наличие вершин и конических точек общего вида, а также бесконечно малые изгибания некоторых многомерных поверхностей с коническими точками.

Методика исследования. При решении поставленной задачи используются методы современной дифференциальной геометрии и топологии, математического анализа, функционального анализа, теории уравнений с частными производными, теории внешних дифференциальных форм. Доказательство основных теорем проводится методом интегральных формул.

Научная новизна и практическая значимость работы определяется следующими полученными в ней результатами:

— исследованы бесконечно малые изгибания гладких двумерных поверхностей с коническими точками;

— обобщены на случай поверхностей с коническими точками и с пониженной гладкостью интегральные формулы В. Бляшке и В. Т. Фоменко и П. Е. Маркова;

— установлены признаки жесткости замкнутых кусочно выпуклых двумерных поверхностей типа тора с особыми точками, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве;

— исследованы бесконечно малые изгибания $(k+1)$-мерного конуса с k-мерной направляющей, расположенной в n-мерной гиперплоскости, $1 \leqslant k < n$, $(n+1)$-мерного евклидова пространства; получены признаки жесткости такого конуса.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании бесконечно малых изгибаний нерегулярных поверхностей как в трехмерном, так и в многомерных пространствах постоянной кривизны, при решении различных задач римановой геометрии, при разработке спецкурсов по дифференциальной геометрии и математическому анализу.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и научных семинарах: на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 1998 г.), на международной школе-семинаре по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2000 г.), на семинаре по геометрии "в целом" Московского государственного университета (1998, 2001 г.г., рук., проф. И. Х. Сабитов, проф. Е. В. Шикин), на научном семинаре кафедры геометрии Казанского госуниверситета (2001 г., рук. проф. Б. Н. Шапуков), на семинаре по геометрии Ростовского госуниверситета (1998 – 2001 г.г., рук. проф. С.Б. Климентов).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1, 2, 3, 4]. Работы [1, 2] выполнены совместно с научным руководителем. Их результаты принадлежат каждому из авторов в равной мере.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав и списка литературы из 43 названий. Объем работы — 79 страниц.

Содержание работы

В первой главе приводятся вспомогательные факты из теории поверхностей трехмерного евклидова пространства и теории бесконечно малых изгибаний, на которые опирается основной материал диссертации. В § 1 доказывается, что классические уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци, справедливые для поверхностей класса C^3, сохраняют свою форму и для поверхностей класса C^2, если использовать понятие обобщенного внешнего дифференциала. В § 2 приводятся определения основных понятий из теории бесконечно малых изгибаний регулярных поверхностей и в несколько усиленной формулировке доказывается лемма о знаке дискриминанта варьированной второй основной формы поверхности, а также лемма о поведении изгибающего поля на плоских областях.

Во второй главе доказывается ряд утверждений вспомогательного характера. В § 1 показывается, что достаточно малая окрестность внутренней конической точки на поверхности допускает инъективное ортогональное проектирование на касательный конус к поверхности в этой точке. Этот факт позволяет ввести аналог явного задания поверхности в окрестности конической точки, используя ортогональное проектирование на касательный конус. В § 2 исследуется поведение поля вращений в особых точках. Доказывается, что оно может быть непрерывно (не однозначно) продолжено в коническую точку и выясняется асимптотика его производных. В этом же параграфе изучается поведение поля вращений на ребрах и в вершинах.

Третья глава содержит основные результаты диссертации. § 1 посвящен выводу основных интегральных формул. Здесь известная формула В. Бляшке и формула В. Т. Фоменко и П. Е. Маркова обобщаются на случай поверхностей с коническими точками. В § 2 формулируются и доказываются теоремы о жесткости овалоида класса C^2. Предполагается, что овалоид удовлетворяет следующим условиям.

1. *Он состоит из конечного числа кусков поверхностей класса C^2, каждая из которых может содержать лишь конечное число конических точек.* Эти куски мы называем *гранями.*

2. *Каждая грань ограничена конечным числом регулярных дуг класса C^2.* Эти дуги мы называем *ребрами.* Точки пересечения ребер называем *вершинами.*

3. *Конические точки не лежат на ребрах.*

4. *В каждой конической точке касательный конус к содержащей эту точку грани является поверхностью класса*

C^3.

5. *Граница каждой плоской максимальной связной компоненты на овалоиде является простой жордановой кривой, состоящей из конечного числа регулярных дуг класса* C^2.

При этих условиях доказывается теорема 3.2.1 о том, что овалоид обладает жесткостью вне плоских областей относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с непрерывными изгибающими полями, принадлежащими классу C^2 на каждой грани. Заметим, что эта теорема не содержит утверждений о жесткости в целом поверхности, содержащей плоские области, например, о жесткости многогранника. Следующая теорема не исключает случая, когда овалоид является многогранником.

ТЕОРЕМА 3.2.2. *Овалоид, удовлетворяющий условиям* 1 – 5, *обладает жесткостью относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с непрерывными изгибающими полями, принадлежащими классу* C^2 *на каждой грани и тривиальными на каждой плоской области.*

Результаты этого параграфа не являются новыми, поскольку А. В. Погореловым они установлены для овалоида без всяких условий на гладкость и регулярность. В диссертацию они включены для демонстрации в простой ситуации метода доказательства, который может быть использован для доказательства жесткости и невыпуклых поверхностей. Такие поверхности рассматриваются в § 2.

В 1938 г. А. Д. Александровым был выделен класс замкнутых поверхностей рода $p \geqslant 1$ трехмерного евклидова пространства, названных им поверхностями T (поверхностями типа тора). Им доказана однозначная определенность метрикой поверхностей T в указанном классе, а также жесткость относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка. Доказательство жесткости и однозначной определенности проводилось при условии кусочной аналитичности поверхности. Н. В. Ефимовым требование аналитичности в теореме А. Д. Александрова об однозначной определенности было ослаблено до трехкратной непрерывной дифференцируемости. Возникает задача распространения результатов А. Д. Александрова и Н. В. Ефимова на поверхности с тем же топологическим строением, но с ослабленными требованиями к гладкости. На этом пути И. Х. Сабитовым доказана жесткость торообразной кусочно выпуклой поверхности вращения, меридиан которой склеен из двух выпуклых кусочно гладких в классе C^2 кривых.

В § 3 третьей главы диссертации рассматриваются бесконечно малые изгибания замкнутых поверхностей рода 1 (которые могут не быть поверхностями вращения), склеенных из кусков выпуклых поверхностей класса C^2, и устанавливается достаточный признак жесткости таких поверхностей. Несмотря на то, что класс поверхностей, рассматриваемых в этом параграфе, довольно широк, он допускает следующее конструктивное описание.

Пусть F — ограниченная выпуклая поверхность с краем, лежащим в некоторой плоскости Π, взаимно однозначно проектирующаяся на плоскость Π, удовлетворяющая перечисленным выше условиям 1 – 5. Обозначим через h расстояние от плоскости Π до опорной плоскости к поверхности F, параллельной плоскости Π. Рассмотрим плоскость π_0, параллельную плоскости Π, не проходящую через вершины и конические точки поверхности F, расположенную между Π и опорной плоскостью и отстоящую от Π на расстоянии $h_0 < \dfrac{h}{2}$. Эта плоскость отсекает от поверхности F шапочку. Допустим, что расстояние от каждой конической точки этой шапочки до плоскости π_0 отлично от h_0. Заменим эту шапочку зеркальным отражением относительно плоскости

π_0 (рис. 1.a) и удалим ту часть возникшей поверхности, которая оказалась по разные стороны с плоскостью π_0 от плоскости Π. Получим поверхность F_1 с краем, лежащим в плоскости Π (рис. 1.b).

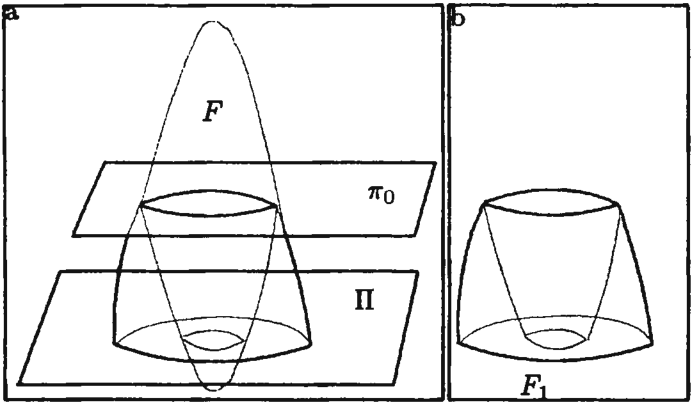

Рис. 1.

Отразим теперь поверхность F_1 зеркально относительно плоскости Π. Полученную поверхность обозначим через F_2. Поверхность $\Phi = F_1 \cup F_2$ (рис. 2.a) является первым представителем класса поверхностей, рассматриваемого в этом параграфе. На рис. 2.b изображено сечение ее плоскостью, перпендикулярной плоскости Π.

Рассмотрим теперь плоскость π_1, не проходящую через вершины и конические точки поверхности Φ, параллельную плоскости Π и отстоящую от нее на расстоянии h_1, удовлетворяющем неравенству $\frac{h_0}{2} < h_1 < h_0$. Заменим часть поверхности Φ, лежащую с плоскостью Π по разные стороны от плоскости π_1, ее зеркальным отражением относительно

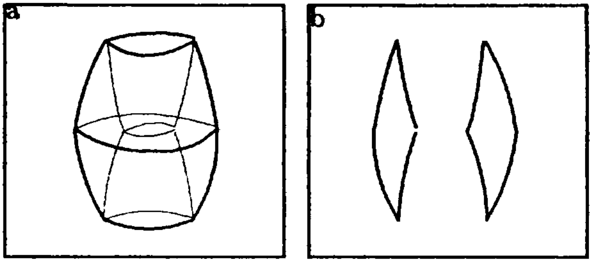

Рис. 2.

плоскости π_1 (рис. 3.a). А. В. Погореловым эта операция называется зеркальным выпучиванием относительно плоскости π_1. Возникшую в результате описанного зеркального выпучивания поверхность обозначим через Φ^1. Ее можно снова подвергнуть зеркальному выпучиванию относительно плоскости π_2, проходящей между Π и π_1 мимо вершин и конических точек, параллельно этим плоскостям на расстоянии h_2 от плоскости Π, удовлетворяющем неравенству $\frac{h_1}{2} < h_2 < h_1$. Повторим эту операцию выпучивания k раз. Полученную поверхность обозначим через Φ^k. Поверхность Φ^k подвергнем l-кратному зеркальному выпучиванию относительно плоскостей π'_i, проходящих мимо вершин и конических точек параллельно плоскости Π по другую сторону от нее на расстояниях h'_i, удовлетворяющих неравенствам $\frac{h'_i}{2} < h'_{i+1} < h'_i$, $i = 0, \dots, l-1$. В результате получим поверхность Φ^k_l с "зубчатым" сечением, изображенным на рис. 3.b.

Поскольку плоскости π_i, π_i' могут пересекать и содержать ребра, описанной конструкцией может быть получен довольно широкий класс кусочно выпуклых поверхностей рода 1.

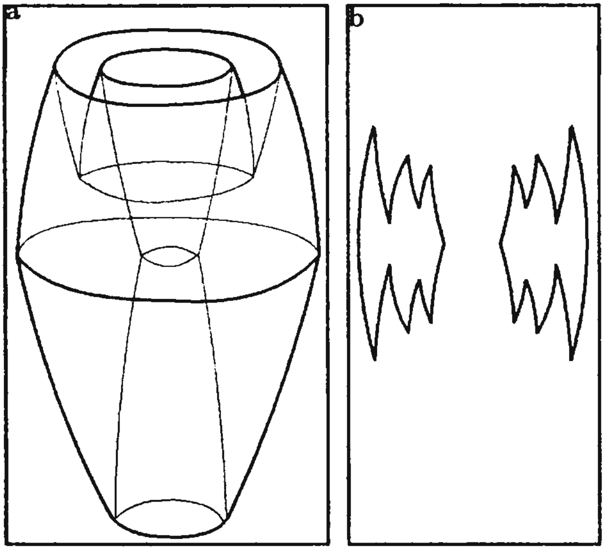

Рис. 3.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Поверхность Φ_l^k обладает жесткостью вне плоских областей относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на Φ_l^k и принадлежащими классу C^2 на каждой грани.*

Как и в случае овалоида, эта теорема не содержит утверждений о глобальной жесткости поверхностей с плоскими гранями, например, многогранников. Этот пробел устраняется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.3.2. *Поверхность Φ_l^k обладает жесткостью относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на Φ_l^k, принадлежащими классу C^2 на каждой грани и тривиальными на каждой плоской области.*

В четвертой главе рассматривается один из модельных примеров многомерной поверхности с конической точкой — $(k+1)$-мерный конус, расположенный в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}, $1 < k < n$, имеющий k-мерную направляющую, лежащую в гиперплоскости E^n, и одномерные прямолинейные образующие.

В § 1 приводятся необходимые сведения из многомерной дифференциальной геометрии. В § 2 доказывается

ТЕОРЕМА 4.2.1. *Если k-мерная направляющая $(k+1)$-мерного конуса является жесткой поверхностью в пространстве E^n и в каждой точке имеет типовое число $t \geqslant 2$, то конус является жестким в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}.*

С использованием результатов П. Е. Маркова из этой теоремы выводится

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть k-мерная направляющая $(k+1)$-мерного конуса класса C^2 с одномерными прямолинейными образующими лежит в n-мерном евклидовом пространстве $E^n \subset E^{n+1}$ и в каждой точке имеет типовое число $t \geqslant 3$. Тогда конус является жесткой поверхностью в E^{n+1}.*

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Марков П. Е., Шкрыль Е. В.* О жесткости кусочно выпуклых поверхностей типа тора. //Тезисы докл. на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Ростов-на-Дону. 1998. С. 53 — 55.

[2] *Марков П. Е., Шкрыль Е. В.* О жесткости кусочно выпуклых поверхностей типа тора.// Матем. сборник. 2000. Т.191, №4. С. 107 - 141.

[3] *Шкрыль Е. В.* Бесконечно малые изгибания многомерного конуса.// Тезисы докл. на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 1998. С. 53 — 55.

[4] *Шкрыль Е. В.* О жесткости многомерного конуса.// Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2000. №4. С. 20 - 22.

2 –